정답표와 예상 등급컷

정답표

공통과목

1번 ③ / 2번 ⑤ / 3번 ② / 4번 ④ / 5번 ①

6번 ③ / 7번 ⑤ / 8번 ② / 9번 ③ / 10번 ⑤

11번 ③ / 12번 ④ / 13번 ② / 14번 ③ / 15번 ①

16번 27 / 17번 8 / 18번 5 / 19번 24 / 20번 512

21번 20 / 22번 35

확률과 통계

23번 ② / 24번 ⑤ / 25번 ③ / 26번 ④ / 27번 ①

28번 ② / 29번 451 / 30번 59

미적분

23번 ② / 24번 ③ / 25번 ③ / 26번 ① / 27번 ④

28번 ③ / 29번 41 / 30번 7

기하

23번 ② / 24번 ④ / 25번 ① / 26번 ③ / 27번 ⑤

28번 ⑤ / 29번 27 / 30번 54

예상 등급컷

공통과목과 선택과목을 합한 100점 만점 원점수 기준입니다.

선택과목	1등급	2등급	3등급
확률과 통계	86점	80점	72점
미적분	84점	78점	70점
기하	86점	80점	72점

위 점수는 문항 구성과 예상 풀이 부담을 바탕으로 정한 제작자 예상치입니다. 실제 응시 결과에 따라 달라질 수 있습니다.

공통과목 해설

1번 | 정답 ③ | 2점

R1. 같은 수를 계산하기 쉬운 형태로 바꾼다

조건

$8^{2/3}+27^{1/3}$의 값은?

사용 과정

$8=2^3$, $27=3^3$이므로 $8^{2/3}=4$, $27^{1/3}=3$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 7이다.

2번 | 정답 ⑤ | 2점

R1. 도함수에 주어진 값을 대입한다

조건

$x=1$에서의 미분계수를 구한다.

사용 과정

$f'(x)=x^2+2x(x+2)-1$이므로 $f'(1)=6$이다.

결과 · 다음 연결

미분계수는 6이다.

공통과목 3번 해설

3번 | 정답 ② | 3점

R1. 같은 간격의 항과 합을 연결한다

조건

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 + a_8 = 24$일 때, a_5의 값은?

사용 과정

등차수열에서 가운데 항은 같은 거리의 두 항의 평균이다. $2a_5 = a_2 + a_8 = 24$이다.

결과 · 다음 연결

요구한 값은 12이다.

4번 | 정답 ④ | 3점

R1. 빈 점의 함수값을 극한과 맞춘다

조건

$x = 3$에서 연속이다.

사용 과정

분자는 $(x-(3))(x+(3))$로 인수분해된다. $x \neq 3$에서 약분한 뒤 극한을 취하면 6이다.

결과 · 다음 연결

연속 조건에서 $a = 6$이다.

공통과목 5번 해설

5번 | 정답 ① | 3점

R1. 범위에서 부호를 정한다

조건

$\pi < \theta < 3\pi/2$이고 $\sin\theta = -3/5$일 때, $\cos\theta$의 값은?

사용 과정

제3사분면이므로 코사인은 음수이다. $\cos^2\theta = 1 - 9/25 = 16/25$에서 $\cos\theta = -4/5$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 $-\frac{4}{5}$이다.

6번 | 정답 ③ | 3점

R1. 미분계수와 함수값으로 계수를 결정한다

조건

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$가 $f'(1) = -4$, $f(0) = 2$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은?

사용 과정

$f'(x) = 3x^2 - 6x + a$이므로 $a = -1$이다. $f(0) = b$에서 상수항은 2이다.

결과 · 다음 연결

$f(2) = 8 - 12 + 2 \times (-1) + (2) = -4$이다.

공통과목 7번 해설

7번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 적분의 대칭 또는 구간을 결합한다

조건

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. $\int_{-2}^{2}\{f(x)+2x^2\}\,dx$의 값은?

사용 과정

홀함수의 대칭 구간 정적분은 0이다. 남은 적분은 $4\int_{0}^{2}x^2\,dx=32/3$이다.

결과 · 다음 연결

정적분 값은 $\frac{32}{3}$이다.

8번 | 정답 ② | 3점

R1. 같은 비율을 항 또는 합 사이에 적용한다

조건

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_1+a_3=10$, $a_2=4$, $a_3>a_1$을 만족시킨다. a_5의 값은?

사용 과정

$a_1a_3=a_2^2=16$이다. 합10, 곱16인 두 수는2와8이고 $a_3>a_1$이므로 $a_1=2$, $a_3=8$이다. 공비는2이고 $a_5=32$이다.

결과 · 다음 연결

요구한 값은 32이다.

공통과목 9번 해설

9번 | 정답 ③ | 4점

R1. 로그의 증가성을 진수의 최솟값에 연결한다

조건

진수는 $(x-3)^2+a-9$이고 모든 실수에서 양수이다.

사용 과정

밑이 $2>1$이므로 로그함수는 증가한다. 따라서 $x=3$일 때 진수와 함수가 함께 최소가 되어 $\log_2(a-9)=2$이다.

결과 · 다음 연결

$a-9=4$, $a=13$이다. 진수는 $(x-3)^2+4>0$이므로 정의역 조건도 충족한다.

R2. 주어진 높이를 진수의 방정식으로 되돌린다

조건

$f(x)=3$이고 $a=13$이다.

사용 과정

$x^2-6x+13=8$이므로 $(x-1)(x-5)=0$이다.

결과 · 다음 연결

두 근은 $1, 5$이고 구하는 곱은 5이다. 두 값 모두 진수가 8인 허용해이다.

공통과목 10번 해설

10번 | 정답 ⑤ | 4점

R1. 범위와 최고점 개수로 식을 복원한다

조건

최댓값과 최솟값은 $c+a$, $c-a$이다.

사용 과정

$c+a=5$, $c-a=-1$이므로 $a=3$, $c=2$이다. b가 양의 정수이면 $[0,2\pi]$ 안의 최고점은 정확히 b개이므로 $b=3$이다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=3\sin 3x+2$이다.

R2. 바뀐 각의 구간에서 마지막 해를 고른다

조건

$\sin 3x=1/2$, $0\le 3x\le 3\pi$이다.

사용 과정

해는 $3x=\pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6, 17\pi/6$이다. 가장 큰 것은 $17\pi/6$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 가장 큰 x는 $17\pi/18$이다.

공통과목 11번 해설

11번 | 정답 ③ | 4점

R1. 길이와 각으로 좌표를 정한다

조건

$\mathrm{A}=(0,0)$, $\mathrm{B}=(5,0)$이고 C가 위쪽에 있도록 좌표를 잡는다.

사용 과정

$\mathrm{C}=(7\cos(2\pi/3),7\sin(2\pi/3))=(-7/2,7\sqrt{3}/2)$이다. D는 BC를 2:3으로 내분하므로 $\mathrm{D}=(8/5,7\sqrt{3}/5)$이다.

결과 · 다음 연결

원점에서 D까지의 거리를 구하면 된다.

R2. 피타고라스 정리로 길이를 계산한다

조건

두 좌표는 수평 · 수직 방향 거리이다.

사용 과정

$\mathrm{AD}^2=(8/5)^2+(7\sqrt{3}/5)^2=(64+147)/25=211/25$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $211/25$이다.

공통과목 12번 해설

12번 | 정답 ④ | 4점

R1. 부정적분 항등식을 미분한다

조건

$\mathrm{F}'(x)=f(x)$이다.

사용 과정

양변을 미분하면 $(x-1)f'(x)=3(x-1)^2$이다. $x\neq 1$에서 $f'(x)=3(x-1)$이고 다항식이므로 $x=1$에서도 성립한다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=\frac{3}{2}(x-1)^2+\mathrm{C}$이다.

R2. 함수값으로 상수를 정해 적분한다

조건

$f(1)=2$이므로 $\mathrm{C}=2$이다.

사용 과정

$\int_0^2 f=\frac{3}{2}\int_0^2(x-1)^2dx+4=1+4=5$이다.

결과 · 다음 연결

정답은5이다.

공통과목 13번 해설

13번 | 정답 ② | 4점

R1. 접하는 근을 인수로 묶는다

조건

$f(1)=f'(1)=0$이다.

사용 과정

$f(x)=(x-1)^2(x+a)$라 두면 $f(3)=4(3+a)=32$에서 $a=5$이다.

결과 · 다음 연결

$f'(x)=3(x-1)(x+3)$이다.

R2. 극값 사이의 수평선을 센다

조건

극대는 $x=-3$, 극소는 $x=1$에서 생긴다.

사용 과정

$f(-3)=32$, $f(1)=0$이므로 세 실근 조건은 $0<k<32$이다. 끝값에서는 두 실근뿐이다.

결과 · 다음 연결

$k=1,2,\ldots,31$의 31개이다.

14번 | 정답 ③ | 4점

R1. 서로 역수인 로그를 한 변수로 모은다

조건

$r=\log_y x$라 두면 $x>y>1$이므로 $r>1$이다.

사용 과정

$r+1/r=5/2$에서 $(2r-1)(r-2)=0$이다. $r>1$이므로 $r=2$, 즉 $x=y^2$이다.

결과 · 다음 연결

원래 값의 차 조건을 이차방정식으로 쓸 수 있다.

공통과목 14번 해설

R2. 필요한 곱만 구한다

조건

$x-y=12$, $x=y^2$, $y>1$이다.

사용 과정

$(y-4)(y+3)=0$에서 $y=4$, $x=16$이다. 로그합 조건은 $\log_a(xy)=4$이므로 $a^4=xy$이다.

결과 · 다음 연결

a나 두 로그를 따로 구하지 않아도 $a^4=64$이다. $a=2\sqrt{2}>1$이므로 원조건에도 맞는다.

15번 | 정답 ① | 4점

R1. 같은 높이의 정지점에서 사차함수를 정한다

조건

$f(-2)=f(2)=1$이고 $f'(-2)=f'(2)=0$이다.

사용 과정

$f(x)-1$은 $-2, 2$를 각각 중근으로 가지며 최고차항 계수가 1인 사차식이다. 따라서
$f(x)-1=(x+2)^2(x-2)^2$이다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=(x^2-4)^2+1$이다. 계수 연립으로도 같은 식을 얻지만 그 계산은 필수가 아니다.

R2. 안쪽 식의 범위와 대응 수를 유지한다

조건

$u=|x|-1$이라 두면 $u\geq -1$이다.

사용 과정

$u=-1$은 $x=0$ 하나에, $u>-1$은 $x=\pm(u+1)$ 두 개에 대응한다. $f(u)$는 $u=-1, 0, 2$에서 각각 $10, 17, 1$이다.

결과 · 다음 연결

여섯 실근을 얻으려면 $u>-1$인 세 해가 필요하다.

공통과목 15번 해설

R3. 세 가지 구간을 동시에 가르는 높이를 찾는다

조건

$[-1,0]$에서 f는 10에서 17까지 증가하고, $[0,2]$에서 17에서 1까지 감소하며, $[2,\infty)$에서 1부터 증가한다.

사용 과정

세 구간의 내부에서 각각 한 해가 생기는 조건은 $10<k<17$이다. $k=10$에서는 $u=-1$의 대응수가 1이므로 다섯 실근이고, $k=17$에서는 $u=0$이 중복되어 네 실근이다.

결과 · 다음 연결

$k=11,12,13,14,15,16$이므로 합은 81이다.

16번 | 정답 27 | 3점

R1. 로그식을 지수식으로 바꾼다

조건

양수 a,b에 대하여 $\log_3 a=2$, $\log_a b=\frac{3}{2}$일 때, b의 값을 구하시오.

사용 과정

$a=3^2$이고 $b=a^{\frac{3}{2}}=3^3$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 $b=27$이다.

공통과목 17번 해설

17번 | 정답 8 | 3점

R1. 원시함수의 양 끝값을 뺀다

조건

$\int_1^3 (3x^2 - 6x + 3)\,dx$의 값을 구하시오.

사용 과정

한 원시함수는 $\mathrm{F}(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$이다. $\mathrm{F}(3) - \mathrm{F}(1)$을 계산한다.

결과 · 다음 연결

정적분 값은 8이다.

18번 | 정답 5 | 3점

R1. 누적된 합에서 항을 복원해 소거한다

조건

수열 $\{a_n\}$의 첫 번째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{S}_n = n(n+3)$이다.

사용 과정

$n \geq 2$에서 $a_n = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} = 2n + 2$이다. $a_1 = \mathrm{S}_1 = 4$도 같은 식과 일치한다.

$1/(a_k a_{k+1}) = \frac{1}{2}(1/a_k - 1/a_{k+1})$로 분해하면 중간 항들이 소거된다. 따라서 합은 $\frac{1}{2}(1/4 - 1/14)$이다.

결과 · 다음 연결

주어진 계수를 곱하면 5이다.

공통과목 19번 해설

19번 | 정답 24 | 3점

R1. 유한한 극한에서 근과 기울기를 얻는다

조건

최고차항의 계수가1인 이차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-(2)}=5$을 만족시킨다.

사용 과정

분모가0으로 가므로 $f(2)=0$이다. $f(x)=(x-(2))(x+b)$라 두면 극한은 $2+b=5$이어서 $b=3$이다.

결과 · 다음 연결

$f(5)=(5-(2))(5+(3))=24$이다.

20번 | 정답 512 | 4점

R1. 돌아온 조건을 변위 적분으로 쓴다

조건

처음과 끝의 위치가 같으므로 속도의 정적분이0이다.

사용 과정

$\int_0^4(t^2-4at+3a^2)dt=64/3-32a+12a^2=0$이다. 정리하면 $(3a-4)^2=0$이므로 $a=4/3$이다.

결과 · 다음 연결

방향이 바뀌는 시각은 $4/3,4$이다.

공통과목 20번 해설

R2. 방향별 이동 거리를 합한다

조건

$0<t<4/3$에서 속도는 양수, $4/3<t<4$에서 음수이다.

사용 과정

앞부분의 변위는 $\int_0^{4/3} v = 256/81$이다. 전체 변위가0이므로 뒷부분의 거리도 $256/81$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{L}=512/81$이므로 $81\mathrm{L}=512$이다.

21번 | 정답 20 | 4점

R1. 전구간 부등식을 영점과 이차식의 조건으로 바꾼다

조건

$x>0$에서는 $f(x)\ge 0$, $x<0$에서는 $f(x)\le 0$이고 f는 연속이다.

사용 과정

양쪽에서 0으로 보내면 $f(0)=0$이다. 따라서 $f(x)=x(x^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B})$로 놓는다. $x\neq 0$에서 $x^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}\ge 0$이고 연속이므로 $x=0$에서도 성립한다.

결과 · 다음 연결

위로 볼록한 이차식이 항상 음이 아니므로 판별식에서 $\mathrm{B}\ge \mathrm{A}^2/4$이다.

R2. 두 미분조건을 같은 계수 범위에 합친다

조건

$f'(x)=3x^2+2\mathrm{A}x+\mathrm{B}$이다.

사용 과정

$f'(1)=0$에서 $\mathrm{B}=-3-2\mathrm{A}$이다. 앞 부등식에 넣으면 $(\mathrm{A}+4)^2\le 4$이므로 $-6\le \mathrm{A}\le -2$이다. 한편 $f'(3)=27+6\mathrm{A}+\mathrm{B}=24+4\mathrm{A}\le 0$에서 $\mathrm{A}\le -6$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{A}=-6$, $\mathrm{B}=9$만 가능하다.

공통과목 21번 해설

R3. 모든 입력에 대한 충분성을 되짚는다

조건

$f(x)=x(x-3)^2$이다.

사용 과정

$xf(x)=x^2(x-3)^2\geq 0$이고 $f'(1)=f'(3)=0$이므로 모든 조건을 만족한다.

결과 · 다음 연결

$f(5)=5(5-3)^2=20$이다.

22번 | 정답 35 | 4점

R1. 두 부분합의 차로 영점의 상대 위치를 정한다

조건

공차 d는 양의 정수이다. $\mathrm{S}_{2m}-\mathrm{S}_m=0$이다.

사용 과정

a_{m+1}부터 a_{2m}까지의 합을 쓰면 $2a_1+(3m-1)d=0$이다. 따라서 $a_k=d\{k-(3m+1)/2\}$이다.

결과 · 다음 연결

항의 부호가 바뀌는 위치는 $(3m+1)/2$이며, 이것이 정수인지에 따라 절댓값 합을 구한다.

R2. m이 짝수인 경우를 정수 조건으로 제외한다

조건

$m=2r$이면 $a_1=-(6r-1)d/2$가 정수이므로 $d=2s$인 양의 정수 s가 있다.

사용 과정

음의 항은 $3r$개, 양의 항은 r개이다. 절댓값 합은
$d(1+3+\cdots+(6r-1))/2+d(1+3+\cdots+(2r-1))/2=5r^2d=10r^2s$이다.

결과 · 다음 연결

이 값은 10의 배수여서 155가 될 수 없다. 따라서 m은 홀수이다.

공통과목 22번 해설

R3. 홀수 경우의 부호별 합에서 공차와 m을 정한다

조건

m은 3 이상의 홀수이다. 영항의 번호는 $(3m+1)/2$이다.

사용 과정

음의 항의 절댓값은 $d, 2d, \ldots, (3m-1)d/2$이고 양의 항은 $d, 2d, \ldots, (m-1)d/2$이다. 두 등차합을 더하면 $d(5m^2-1)/4 = 155$, 즉 $d(5m^2-1) = 620$이다.

이 식을 5로 나눈 나머지를 보면 d는 5의 배수이다. $d = 5e$라 두면 $(5m^2-1)e = 124$이다. $m \geq 3$이므로 $e \leq 2$이다. $e = 2$에서는 $5m^2 = 63$으로 불가능하고, $e = 1$에서는 $m = 5$이다.

결과 · 다음 연결

$d = 5$, $a_1 = -(15-1)5/2 = -35$이다.

R4. 원조건과 목표 항을 확인한다

조건

처음 열 항은 $-35, -30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10$이다.

사용 과정

$S_5 = -125 = S_{10}$이고 절댓값 합은 155이다. $a_{3m} = a_{15} = -35 + 14 \cdot 5$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 35이다.

확률과 통계 해설

확률과 통계 해설

23번 | 정답 ② | 2점

R1. 목표 차수를 만드는 인수를 고른다

조건

5개의 인수 중 3개에서 x를 고른다.

사용 과정

계수는 ${}_5\mathrm{C}_3\,2^2 = 40$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 40이다.

24번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 독립관계를 여사건에 적용한다

조건

A와 B가 독립이면 A^c와 B도 독립이다.

사용 과정

$\mathrm{P}(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}) = (1-\mathrm{P}(\mathrm{A}))\mathrm{P}(\mathrm{B}) = (1-\frac{2}{5})\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $\frac{3}{10}$이다.

확률과 통계 25번 해설

25번 | 정답 ③ | 3점

R1. 표본평균의 표준편차로 표준화한다

조건

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기 36인 표본의 표본평균을 $\overline{\mathrm{X}}$라 할 때 $\mathrm{P}(|\overline{\mathrm{X}} - m| \le 2) = 0.9544$이다.

사용 과정

첫 표본에서 표준화 경계는 $2/(\sigma/6) = 2$이므로 $\sigma = 6$이다. 새 표본의 표준편차는 $6/10$이고 신뢰구간 길이는 $2 \times 1.96 \times 6/10 = 2.352$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 $\frac{294}{125}$이다.

26번 | 정답 ④ | 3점

R1. 첫 색에 따라 두 번째 주머니를 나눈다

조건

흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공 한 개를 임의로 꺼내 색을 확인한 뒤 다시 넣고, 꺼낸 공과 같은 색의 공 한 개를 더 넣는다.

사용 과정

처음 흰 공이면 검은 공 3개 중 2개를 고르므로 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2/{}_6\mathrm{C}_2$이다. 처음 검은 공이면 검은 공이 4개이므로 분자는 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.

결과 · 다음 연결

처음색까지 곱한 두 갈래 확률은 각각 $\frac{2}{25}$, $\frac{6}{25}$이다.

확률과 통계 26번 해설

R2. 관찰한 사건 안에서 비율을 구한다

조건

조건부확률의 분모는 나중 두 공이 검은 모든 경우이다.

사용 과정

구하는 확률은 $\frac{\frac{2}{25}}{\frac{8}{25}}=\frac{1}{4}$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $\frac{1}{4}$이다.

27번 | 정답 ① | 3점

R1. 한 시행의 결과를 성공 횟수로 표현한다

조건

합이 홀수이려면 홀수 카드1장과 짝수 카드1장을 고른다.

사용 과정

확률은 $3\times 3/{}_6\mathrm{C}_2=3/5$이다. 성공 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,3/5)$를 따르고 총점은 $\mathrm{S}=3\mathrm{X}-n$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{V}(\mathrm{S})=9n(3/5)(2/5)=54n/25=54$이다.

R2. 분산에서 횟수를 정해 평균을 구한다

조건

분산의 상수배는 계수의 제곱이다.

사용 과정

$n=25$이고 $\mathrm{E}(\mathrm{S})=3(3n/5)-n=4n/5=20$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 20이다.

확률과 통계 28번 해설

28번 | 정답 ② | 4점

R1. 앞 네 자리의 합으로 사용한 숫자 묶음을 분류한다

조건

앞뒤 네 자리의 합이 같으므로 각각10이다.

사용 과정

앞 네 자리의 숫자 묶음은 $\{1,1,4,4\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{2,2,3,3\}$뿐이다. 숫자별 사용 횟수는 각각2이하라는 제한을 유지한다.

결과 · 다음 연결

각 묶음에서 앞뒤 내부와 중앙 경계를 나누어 확인한다.

R2. 같은 숫자가 두 개씩 있는 묶음을 센다

조건

첫 번째와 세 번째 묶음의 경우 뒤쪽은 나머지 두 숫자의 반복이다.

사용 과정

앞쪽은1414 또는4141처럼 교대로 놓는2가지, 뒤쪽도2가지이다. 중앙 경계는 서로 다른 숫자 집합이라 항상 조건을 만족한다.

결과 · 다음 연결

두 묶음에서 $2\times2\times2=8$가지이다.

R3. 네 숫자가 모두 다른 경우의 중앙 경계를 검사한다

조건

앞뒤가 각각$1,2,3,4$의 순열이다.

사용 과정

전체 $4!\times4!=576$가지 중 네 번째와 다섯 번째 숫자가 같은 경우는 $4!\times3!=144$가지이다.

결과 · 다음 연결

$8+576-144=440$가지이다.

확률과 통계 29번 해설

29번 | 정답 451 | 4점

R1. 두 점 분포의 평균과 분산으로 지지점 후보를 만든다

조건

두 값만 갖는 분포에서 평균5는 a, b 사이이다.

사용 과정

$p_0 = \mathrm{P}(\mathrm{X}=a) = (b-5)/(b-a)$이고 분산은 $(5-a)(b-5) = 12$이다. a가 자연수이므로 $5-a = 1, 2, 3, 4$ 중12의 약수이다.

결과 · 다음 연결

후보 (a, b)는 $(4, 17), (3, 11), (2, 9), (1, 8)$이다.

R2. 확률의 크기로 후보를 선택한다

조건

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a) < 1/2$는 $b-5 < 5-a$와 같다.

사용 과정

앞의 후보 중 $(1, 8)$만 이를 만족한다. 따라서 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = 3/7$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=8) = 4/7$이다.

결과 · 다음 연결

세 번의 합이10이려면8이 한 번,1이 두 번 나와야 한다.

R3. 독립 표본의 순서를 포함하여 확률을 계산한다

조건

8이 나오는 위치는3가지이다.

사용 과정

확률은 $3(4/7)(3/7)^2 = 108/343$이다.

결과 · 다음 연결

$p + q = 343 + 108 = 451$이다.

확률과 통계 30번 해설

30번 | 정답 59 | 4점

R1. 조건부 표본공간을 치역별로 센다

조건

치역이 될 세 원소의 선택은 ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$가지이다.

사용 과정

그 세 값을 모두 사용하는 함수의 수는 $3^5 - 3\times 2^5 + 3 = 150$이다. 빠지는 값이 한 개일 때를 빼고 두 개일 때를 다시 더했다.

결과 · 다음 연결

분모는 $10\times 150 = 1500$이다.

R2. 합성 조건을 치역 위의 대응으로 바꾼다

조건

치역의 원소 $y = f(k)$마다 $f(f(y)) = y$이다.

사용 과정

따라서 치역 안에서는 한 번 더 적용하면 되돌아오는 대응이어야 한다. 서로 다른 두 값을 하나로 보내면 다시 되돌릴 수 없으므로 일대일 대응이다. 치역3개 중 고정점이 정확히 하나이므로 나머지 둘은 서로 교환된다.

결과 · 다음 연결

치역을 고른 뒤 고정점 선택은3가지, 나머지 둘의 대응은 하나로 정해진다.

R3. 치역 밖의 두 입력을 배정한다

조건

밖의 두 입력은 이미 정해진 치역3개 중 어느 값으로 보내도 합성 조건이 성립한다.

사용 과정

밖의 입력은 자신으로 갈 수 없으므로 추가 고정점도 생기지 않는다. 선택은 $3^2 = 9$가지이다.

결과 · 다음 연결

분자는 $10\times 3\times 9 = 270$, 확률은 $270/1500 = 9/50$이므로 $p+q = 59$이다.

미적분 해설

23번 | 정답 ② | 2점

R1. 알려진 극한 형태로 바꾼다

조건

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n}-n)$의 값은?

사용 과정

분자를 유리화하면 $4n/(\sqrt{n^2+4n}+n)=4/(\sqrt{1+4/n}+1)$이다.

결과 · 다음 연결

극한은 2이다.

24번 | 정답 ③ | 3점

R1. 곱의 미분법으로 기울기를 구한다

조건

$x=e>0$이므로 $\ln x$와 그 도함수를 사용할 수 있다.

사용 과정

$f'(x)=2x\ln x+x^2(1/x)=2x\ln x+x$이다.

결과 · 다음 연결

$f'(e)=3e$이다.

미적분 25번 해설

25번 | 정답 ③ | 3점

R1. 안쪽 식을 변수로 정한다

조건

$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$의 값은?

사용 과정

$u=1+e^x$라 두면 $du=e^x dx$이고 경계는$2,3$이다. 따라서 적분은 $[-1/u]_2^3=1/6$이다.

결과 · 다음 연결

적분값은 $\frac{1}{6}$이다.

26번 | 정답 ① | 3점

R1. 수렴 범위를 유지하며 합의 식을 만든다

조건

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=6$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2=12$를 만족시킨다.

사용 과정

첫 번째항을 A, 공비를 r라 두면 $0<r<1$이다. $\mathrm{A}/(1-r)=6$, $\mathrm{A}^2/(1-r^2)=12$이므로 $36(1-r)/(1+r)=12$, $r=1/2$, $\mathrm{A}=3$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 $\frac{3}{4}$이다.

미적분 27번 해설

27번 | 정답 ④ | 3점

R1. 주어진 변화율을 목표 변수의 변화율로 바꾼다

조건

곡선 $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$의 $x=0$부터 $x=3$까지의 길이는?

사용 과정

$y'=\sqrt{x}$이므로 길이는 $\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx=[2(1+x)^{3/2}/3]_0^3=14/3$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $\frac{14}{3}$이다.

28번 | 정답 ③ | 4점

R1. 최솟값을 주는 x를 매개변수로 나타낸다

조건

$f'(t)=(t+1)/t>0$이고 $g'(x)=g(x)/(g(x)+1)$이다.

사용 과정

$\mathrm{H}'(x)=\ln g(x)$, $\mathrm{H}''(x)=1/(g(x)+1)>0$이다. H'의 값은 모든 실수를 지나므로 $\mathrm{H}(x)-ax$의 유일한 최소점은 $g(x)=e^a$, 즉 $x=e^a+a$이다.

결과 · 다음 연결

최솟값을 구할 때 적분의 위끝은 e^a로 결정된다.

미적분 28번 해설

R2. 최솟값 자체를 함수로 만든다

조건

$\int(1+1/t)\ln t\,dt = t\ln t - t + \frac{1}{2}(\ln t)^2$이다.

사용 과정

$\mathrm{H}(e^a+a) = ae^a - e^a + a^2/2 + 1$이므로 $m(a) = \mathrm{H}(e^a+a) - a(e^a+a) = 1 - e^a - a^2/2$이다.

결과 · 다음 연결

$m'(a) = -e^a - a$, $m''(a) = -e^a - 1$이다.

R3. 기울기 조건을 최소값의 변화에 연결한다

조건

$e^c + c = 2 + \ln 2$이고 $c > 0$이다.

사용 과정

$e^c + c$는 증가하며 $c = \ln 2$가 식을 만족하므로 이 값이 유일하다.

결과 · 다음 연결

$m''(c) = -2 - 1 = -3$이다.

29번 | 정답 41 | 4점

R1. 절댓값의 부호가 변하는 경계를 정한다

조건

$x \le 0$이면 모든 항에서 $x - 2^{-n} < 0$이다.

사용 과정

이때 $\mathrm{F}(x) = 1/3 - x \ge 1/3$이므로 해가 없다. $x \ge 1/2$이면 $\mathrm{F}(x) = x - 1/3$이어서 해는 $13/24$이다.

결과 · 다음 연결

$0 < x < 1/2$에서는 2^{-n}의 크기에 따라 합을 나눈다.

미적분 29번 해설

R2. 한 구간의 급수 합을 다음 구간과 비교한다

조건

$2^{-(k+1)} \le x \le 2^{-k}$인 자연수 k를 정한다.

사용 과정

처음 k항과 나머지를 나누어 등비급수를 합하면 $\mathrm{F}(x) = 1/3 - (2/3)4^{-k} + (2^{1-k}-1)x$이다. $k=1$에서는 항상 $1/6$이다.

결과 · 다음 연결

$k \ge 2$에서는 기울기가 음수이다. 따라서 $0 < x \le 1/4$에서 엄격히 감소하며 한 번만 목표 높이를 지난다.

R3. 해가 놓인 구간을 찾아 식을 푼다

조건

$k=2$인 $1/8 \le x \le 1/4$에서는 $\mathrm{F}(x) = 7/24 - x/2$이다.

사용 과정

$7/24 - x/2 = 5/24$에서 $x = 1/6$이고 해당 구간 안에 있다. 양쪽에서 구한 해 이외에는 없다.

결과 · 다음 연결

합은 $13/24 + 1/6 = 17/24$이므로 $p+q=41$이다.

미적분 30번 해설

30번 | 정답 7 | 4점

R1. 지수함수를 새 변수로 삼아 같은 최소값을 비교한다

조건

$u=e^x>0$으로 두고 $\mathrm{F}(u)=f(\ln u)$라 하면 $\mathrm{F}'(u)=(u-a)(u-1)(u-b)$이고 $\mathrm{F}(1)=0$이다.

사용 과정

F'의 부호는 $u=a,1,b$를 차례로 지날 때 음, 양, 음, 양으로 바뀐다. 따라서 두 최소점은 $u=a,b$이고 $\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(b)=-1/64$이다.

결과 · 다음 연결

F는 최고차항의 계수가 $1/4$인 사차함수이며, 두 최소점의 값이 같은 정보를 얻었다.

R2. 같은 최소값을 갖는 두 점을 중근으로 연결한다

조건

$\mathrm{F}(u)+1/64$는 $u=a,b$에서 함숫값과 도함수가 모두 0이다.

사용 과정

따라서 $\mathrm{F}(u)+1/64=\frac{1}{4}(u-a)^2(u-b)^2$이다. 이 식의 도함수는 $\frac{1}{2}(u-a)(u-b)(2u-a-b)$이다. 원래 도함수와 비교하면 $a+b=2$이다.

결과 · 다음 연결

$a=1-d$, $b=1+d$인 $0<d<1$을 둘 수 있다.

R3. 주어진 기준값으로 간격을 정하고 목표를 계산한다

조건

$\mathrm{F}(1)=0$이다.

사용 과정

$1/64=\frac{1}{4}(1-a)^2(1-b)^2=d^4/4$이므로 $d=1/2$이다. 따라서 $\mathrm{F}(u)=\frac{1}{4}(u-1/2)^2(u-3/2)^2-1/64$이고 $\mathrm{F}(3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{4}\cdot\frac{9}{4}-1/64=7/2$이다.

결과 · 다음 연결

$2f(\ln 3)=2\mathrm{F}(3)=7$이다. 이 함수는 모든 $u>0$에서 $-1/64$ 이상이며 등호는 두 점에서만 성립한다.

기하 해설

기하 해설

23번 | 정답 ② | 2점

R1. 표준형에서 초점 관계를 읽는다

조건

타원 $x^2/25+y^2/b^2=1$의 두 초점 사이의 거리가8이다. $0<b<5$일 때, b^2의 값은?

사용 과정

장반경은5, 초점거리의 절반은4이다. $b^2=5^2-4^2=9$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 9이다.

24번 | 정답 ④ | 3점

R1. 벡터의 크기를 성분 또는 내적으로 계산한다

조건

두 벡터 $\vec{a},\vec{b}$가 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5$를 만족시킨다. $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?

사용 과정

$25=9+16+2\vec{a}\cdot\vec{b}$이므로 내적은0이다.

결과 · 다음 연결

정답은 0이다.

기하 25번 해설

25번 | 정답 ① | 3점

R1. 중점 좌표를 거리 공식에 넣는다

조건

M은 $\mathrm{A}(1,2,3)$과 $\mathrm{B}(3,-2,1)$의 중점이다.

사용 과정

각 좌표의 평균을 구하면 $\mathrm{M}=(2,0,2)$이다. 따라서 $\mathrm{OM}=\sqrt{2^2+0^2+2^2}$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{OM}=2\sqrt{2}$이다.

26번 | 정답 ③ | 3점

R1. 접하는 조건을 직선의 정보로 바꾼다

조건

포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가2인 직선의 y절편은?

사용 과정

직선을 $y=2x+b$라 두어 포물선에 대입하면 $4x^2+(4b-8)x+b^2=0$이다. 중근 조건에서 $(4b-8)^2-16b^2=0$이므로 $b=1$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 1이다.

기하 27번 해설

27번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 공간 관계 또는 내적식을 거리·넓이 관계로 바꾼다

조건

한 변의 길이가 2인 정육면체 $\mathrm{ABCD-EFGH}$에서 AE, BF, CG, DH는 서로 평행한 모서리이다. 삼각형 ABH의 넓이는?

사용 과정

AB는 면 ADHE에 수직이므로 AH에도 수직이다. $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{AH}=2\sqrt{2}$이므로 넓이는 $2\sqrt{2}$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $2\sqrt{2}$이다.

28번 | 정답 ⑤ | 4점

R1. 접선의 절편을 접점의 좌표로 표현한다

조건

$\mathrm{P}=(3u, 2v)$라 두면 $u, v>0$, $u^2+v^2=1$이다.

사용 과정

접선의 절편은 $3/u, 2/v$이다. 넓이 조건은 $3/(uv)=25/2$이므로 $uv=6/25$이다.

결과 · 다음 연결

u^2, v^2의 합은 1, 곱은 $36/625$이다.

기하 28번 해설

R2. 두 접점 사이에 바뀌는 두 값을 찾는다

조건

위 이차방정식의 두 양의 근이 서로 바뀌어 두 접점이 된다.

사용 과정

한 접점에서 $(u^2, v^2) = (s, t)$이면 다른 접점은 (t, s)이다. 거리의 제곱은 각각 $9s + 4t$, $9t + 4s$이다.

결과 · 다음 연결

합은 $13(s + t) = 13$이다. $s \neq t$이므로 실제 두 접점이다.

29번 | 정답 27 | 4점

R1. 같은 원의 조건으로 두 거리식을 단순화한다

조건

$\mathrm{P} = (x, y)$라 두면 $x, y > 0$, $x^2 + y^2 = 9$이다.

사용 과정

$\mathrm{PA}^2 = 13 - 4x$, $\mathrm{PB}^2 = 13 - 4y$이다. $u = x + y$라 두면 $xy = (u^2 - 9)/2$이다.

결과 · 다음 연결

목표의 곱은 $97 - 52u + 8u^2$이다.

R2. 새로 도입한 양의 허용 범위를 확인한다

조건

$x, y > 0$이고 제곱합이 9이다.

사용 과정

$3 < u \le 3\sqrt{2}$이다. 목표식은 $8(u - 13/4)^2 + 25/2$이고 $3 < 13/4 < 3\sqrt{2}$이므로 꼭짓점이 허용 범위 안에 있다.

결과 · 다음 연결

$u = 13/4$일 때 $xy = 25/32 > 0$이며 두 좌표를 실제로 정할 수 있다.

기하 29번 해설

R3. 달성 가능한 하한을 답으로 옮긴다

조건

두 거리의 곱은 제곱항이0일 때 최소이다.

사용 과정

최솟값은 $25/2$이므로 $p+q=27$이다.

결과 · 다음 연결

정답은27이다.

30번 | 정답 54 | 4점

R1. 높이별 단면에서 삼각형 안의 좌표 조건을 얻는다

조건

$\mathrm{P}=(x,y,z)$라 두면 $0\le z\le 3,\ x,y\ge 0$이다.

사용 과정

삼각형을 xy평면과 평행하게 자르면 닮음에서 $x+y=6-2z$이다. 구의 조건은 $x^2+y^2+z^2=9$이므로 $x^2+y^2=9-z^2$이다.

결과 · 다음 연결

두 비음수 좌표의 합과 제곱합이 동시에 가능한지 확인해야 한다.

R2. 좌표의 존재 범위로 높이를 거른다

조건

$s=x+y\ge 0$이면 $s^2/2\le x^2+y^2\le s^2$이다.

사용 과정

왼쪽 부등식은 $(6-2z)^2/2\le 9-z^2$에서 $1\le z\le 3$을 준다. 오른쪽은 $9-z^2\le(6-2z)^2$에서 $(5z-9)(z-3)\ge 0$을 준다.

결과 · 다음 연결

따라서 가능한 높이는 $1\le z\le 9/5$ 또는 $z=3$이다. 이 조건들은 비음수 x,y가 존재하기에 충분하다.

기하 30번 해설

R3. 정사영으로 넓이를 한 변수에 나타낸다

조건

$\mathrm{PQ}=z$, $\mathrm{OQ}=\sqrt{9-z^2}$이고 두 선분은 수직이다.

사용 과정

넓이의 제곱은 $z^2(9-z^2)/4$이다. $1\le z\le 9/5$에서는 $z^2<9/2$이므로 이 값은 증가한다. $z=3$에서는 넓이가0이다.

결과 · 다음 연결

$z=9/5$에서 $\mathrm{OQ}=12/5$이고 $\mathrm{S}=(9/5)(12/5)/2=54/25$이다. $\mathrm{P}=(12/5,0,9/5)$에서 실제로 달성되므로 $25\mathrm{S}=54$이다.